REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

11.º ANO | ENSINO SECUNDÁRIO

Matemática A

INTRODUÇÃO

Este documento curricular apresenta as Aprendizagens Essenciais de Matemática a que os alunos do Ensino Secundário, na disciplina de Matemática A, devem ter acesso, em articulação com o Ensino Básico (EB) e enquadradas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória. Foi elaborado por uma equipa pluridisciplinar, composta por especialistas em Matemática e em Didática da Matemática e por professores experientes nas diferentes vertentes curriculares do Ensino Secundário: Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Helder Martins, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Teresa Santos, Nélida Filipe, Paulo Correia, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

1. Matemática Escolar Orientada para o Futuro

A formação de indivíduos matematicamente competentes é um propósito fundamental do currículo de matemática para o Ensino Secundário. A sociedade e o mundo contemporâneos, marcados pela globalização, crescente digitalização, conectividade e automatização, e por uma aceleração do desenvolvimento tecnológico, enfrentam desafios nos quais o conhecimento matemático adquire um papel essencial, proporcionando conceitos, métodos, modelos e formas de pensar. Esse poder matemático deve ser parte integrante da educação de todos os cidadãos, incluindo conhecimentos e capacidades que os jovens transportarão para a sua vida pessoal, social e profissional.

Empreender uma formação matemática abrangente e inovadora, neste ciclo de escolaridade, significa desenvolver nos alunos a capacidade de identificar conceitos matemáticos relevantes para resolver problemas reais, aplicar procedimentos matemáticos adequados e interpretar os resultados em contextos diversos. O raciocínio matemático está na base dos processos de compreensão dos conceitos e objetos matemáticos, que podem e devem ser analisados, representados e relacionados de diferentes formas. São igualmente importantes a formulação de hipóteses, a testagem de conjeturas, a dedução, a generalização e a abstração, na construção de argumentos lógicos e conclusões, cuja comunicação de forma apropriada é cada vez mais importante no mundo atual.

O currículo consagra o propósito de preparar os alunos para formularem juízos e tomarem decisões fundamentadas, contribuindo para que se tornem cidadãos reflexivos, empenhados e participativos. Visa também contribuir para que os jovens valorizem o papel da Matemática no mundo e o seu carácter de ciência em evolução e renovação permanente, apreciando a sua dimensão estética, a par do seu legado histórico.

Assim, o currículo de Matemática para o futuro orienta-se para o desenvolvimento de áreas de competências, à luz do que é preconizado no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, nomeadamente no que se refere ao pensamento crítico aliado à resolução de problemas, promovendo a criatividade e a comunicação, além de acentuar a pertinência do trabalho colaborativo.

2. Ideias Inovadoras do Currículo

- Matemática para a Cidadania

O reconhecimento do Ensino Secundário como um ciclo que é parte integrante da formação geral dos jovens, incluído na escolaridade obrigatória, cria um contexto em que todas as disciplinas, incluindo a Matemática, devem contribuir para o desenvolvimento dos alunos enquanto cidadãos ativos, conscientes, informados e interventivos.
A crescente relevância do papel da Matemática na sociedade atual realça a importância e a necessidade de dotar os alunos de ferramentas matemáticas de análise dos processos sociais, que estão na base do exercício de uma cidadania ativa. Assim, estas Aprendizagens Essenciais exploram modelos matemáticos de processos eleitorais e a análise matemática de modelos financeiros e valorizam o desenvolvimento da literacia estatística.

- Pensamento Computacional

Os aspetos comuns entre o Pensamento Matemático e o Pensamento Computacional, bem como a relevância atual do Pensamento Computacional na ciência e na sociedade, justificam que o currículo de Matemática valorize esta abordagem conceptual na resolução de problemas. As Aprendizagens Essenciais de Matemática A promovem o desenvolvimento de práticas como a abstração, a decomposição, o reconhecimento de padrões, a análise e definição de algoritmos, bem como a aquisição de hábitos de depuração e otimização dos processos envolvidos na atividade matemática. Deste modo, a aposta no Pensamento Computacional revela a aproximação do currículo às recomendações internacionais, designadamente em relatórios da União Europeia, e também o alinhamento com o currículo de Matemática do Ensino Básico, favorecendo o desenvolvimento desta capacidade de forma integrada, coerente e progressiva.

- Diversificação de temas no currículo

Para além do desenvolvimento de competências dos alunos no âmbito da cidadania, pretende-se continuar a disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com os métodos numéricos, o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia, e a inclusão de temas com pouca tradição no Ensino Secundário em Portugal. Esta diversificação é intensificada no 12.º ano com a proposta de três temas em opção, possibilitando que turmas diferenciadas trabalhem temas matemáticos diferentes, podendo em algumas turmas, caso o tempo o permita, ser lecionado mais do que um dos temas opcionais propostos.

- Matemática para todos

Assume-se que o currículo na escolaridade obrigatória deve dar resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos. Os formalismos e os níveis de abstração devem ser adequados ao trabalho desenvolvido em cada tema. Pretende-se que a matemática seja um contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias.

3. Ideias chave das Aprendizagens Essenciais

As Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Secundário dão continuidade às aprendizagens do Ensino Básico e assumem um conjunto de princípios e orientações metodológicas, cuja concretização e especificação é feita para cada ano de escolaridade e tema matemático. A seguir, enunciam-se e apresentam-se as nove ideias chave preconizadas nas Aprendizagens Essenciais, esquematizadas na Figura 1:

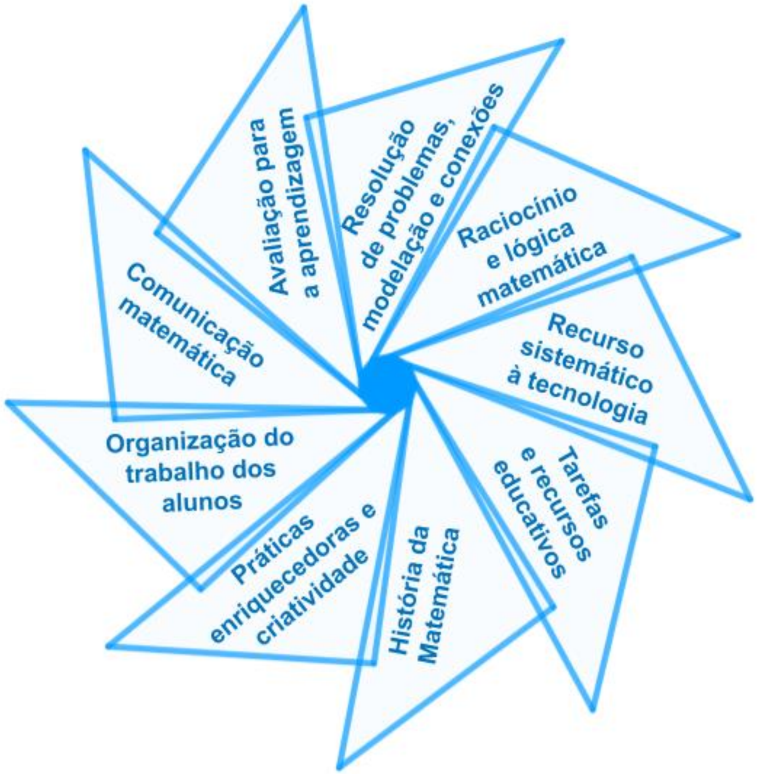

Figura 1 – Ideias chave das Aprendizagens Essenciais

1) Resolução de problemas, modelação e conexões

Dar sentido à Matemática e enfatizar a modelação e as aplicações

A resolução de problemas, tal como a modelação, devem constituir o contexto para o estabelecimento de conexões entre diferentes conceitos e áreas da Matemática, assim como entre a Matemática e outras áreas do saber, permitindo uma abordagem integrada e significativa para os alunos na sua atividade matemática. É fundamental que os alunos tenham contacto com o processo de modelação matemática e sejam capazes de criticar, validar e aperfeiçoar modelos matemáticos. Preconizando a exploração de ideias e conceitos matemáticos, pretende-se que a aprendizagem não se reduza à memorização de regras, ao treino de procedimentos ou à sua execução sem compreensão. É essencial que as definições, os resultados e os procedimentos matemáticos adquiram sentido e que os alunos os saibam mobilizar e aplicar adequadamente para resolver problemas do mundo real, em situações do dia-a-dia ou de outras disciplinas. Uma das áreas de competências no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, fortemente ligada à Matemática - Raciocínio e resolução de problemas - implica que os alunos sejam capazes de: i) interpretar informação, planear e conduzir pesquisas; ii) gerir informações e tomar decisões; iii) desenvolver processos conducentes à construção de conhecimento, usando recursos diversificados.

2) Raciocínio e lógica matemática

Incentivar processos de raciocínio dedutivo, integrando a lógica matemática nos diversos temas

O aluno deve ser sistematicamente incentivado a explorar situações problemáticas, a usar abordagens heurísticas, a formular e validar conjeturas, a justificar processos de resolução e a encadear raciocínios. Os conceitos e métodos relativos à lógica matemática não constituem um tema específico das Aprendizagens Essenciais, mas devem, de forma natural, ser integrados nos vários temas abordados. Noções elementares de Lógica podem e devem ser introduzidas à medida que forem relevantes para a clarificação de processos e de raciocínios. Pretende-se, assim, que o aluno adquira a capacidade de raciocinar dedutivamente e de forma autónoma, usando os princípios e a simbologia inerentes à lógica matemática. A integração do raciocínio dedutivo e da lógica, bem como da linguagem matemática e simbólica, deve estar presente em todos os momentos de aprendizagem, sem se transformar num conteúdo tratado de forma isolada. O grau de formalização a utilizar deve ter sempre em conta o nível de maturidade matemática dos alunos e deve surgir, se possível, como uma necessidade, garantindo que o processo de formalização acompanha a apropriação dos conceitos. Diversos temas, como, por exemplo, Geometria, Funções e Probabilidade, em contexto de resolução de problemas, podem constituir-se como excelentes oportunidades para desenvolver o raciocínio dedutivo, no qual se inclui a utilização de linguagem e de notações adequadas.

3) Recurso sistemático à tecnologia

Incentivar a exploração de ideias e conceitos, integrando a tecnologia como alavanca para a compreensão e resolução de problemas.

A abordagem exploratória de ideias e conceitos matemáticos apresenta-se como determinante, o que pressupõe levar o aluno a participar ativamente num processo de construção e aprofundamento, motivado por questões desafiadoras, problemas e procura de justificações. A integração da tecnologia é considerada como indispensável nesse processo, pelas possibilidades que oferece de experimentação, visualização, representação, simulação, interatividade, bem como, evidentemente, de cálculo numérico e simbólico. O recurso a ambientes de geometria dinâmica (AGD), à folha de cálculo e a aplicativos digitais, explorados em computadores, smartphones ou calculadora gráfica, deve ser feito de forma sistemática. As atividades de programação devem ser integradas com uma complexidade progressiva, sendo relevantes para o desenvolvimento de processos algorítmicos, de um pensamento estruturado e do raciocínio lógico, proporcionando um vasto campo de aplicação da Matemática e envolvendo genuinamente a formulação e a resolução de problemas, além de promover o desenvolvimento do pensamento computacional.

4) Tarefas e recursos educativos

Apoiar a aprendizagem em tarefas, contextos e recursos diversificados

A construção de tarefas de aprendizagem constitui uma das ações decisivas do professor. Uma tarefa matemática enriquecedora pode assumir a forma de um problema, uma questão exploratória, um exercício de aplicação, um pequeno projeto ou uma pesquisa de aprofundamento, sempre que observe os seguintes critérios: ser interessante e desafiante, envolver matemática relevante, criar oportunidades para aplicar e ampliar conhecimentos, permitir diferentes estratégias, tornar possível monitorizar a compreensão dos alunos e apoiar o seu progresso. As tarefas devem ser, ainda, diversificadas e ajustadas aos objetivos de aprendizagem e a sua planificação deve prever diferentes tipos de organização do trabalho dos alunos. A utilização de recursos variados, nomeadamente da tecnologia, bem como a diversificação de contextos de aprendizagem, incluindo laboratórios, espaços fora da sala de aula, museus de ciência e outros, deverão merecer especial atenção na construção de tarefas.

5) História da Matemática

Valorizar a importância da Matemática na evolução da sociedade

O recurso a episódios e problemas marcantes da História da Matemática deve motivar pesquisas, estudos ou debates, não de caráter enciclopédico, mas contribuindo para que o progresso da Matemática seja apreciado e compreendido. Para além do seu valor intrínseco, enquanto património cultural que importa valorizar, existem numerosos factos, aspetos particulares e episódios da História da Matemática que, pelo seu potencial pedagógico, devem ser explorados em tarefas dentro e fora da sala de aula. Os professores devem aproveitar os factos contemporâneos da História da Matemática para levar os alunos a entender o papel determinante da Matemática na sociedade atual. Por exemplo, podem ser referidas as primeiras Medalhas Fields atribuídas a mulheres matemáticas, a importância dos modelos matemáticos para entender a crise climática, a evolução das epidemias ou a exploração espacial.

6) Práticas enriquecedoras e criatividade

Inovar e investir em práticas enriquecedoras, favorecendo o desenvolvimento da criatividade e atitudes positivas face à Matemática

O currículo integra propostas inovadoras, que incluem a realização de projetos, de profundidade e extensão ajustados às condições existentes e aos alunos. É igualmente recomendado que os alunos se envolvam na resolução de questões e problemas autênticos em contextos de interdisciplinaridade (nomeadamente, numa perspetiva integradora de STEAM – ciências, tecnologia, engenharia, artes e matemática). A programação, tal como a modelação ou o trabalho de projeto, abrem inúmeras vias de trabalho promissoras que não devem ser ignoradas. Também a beleza da Matemática, a sua aplicabilidade e a história fascinante que a envolve são fortes motivos para inovar através de práticas de enriquecimento das aprendizagens. É importante que os alunos experimentem o prazer da descoberta em Matemática e que desenvolvam o gosto pelo desafio, pela procura de soluções e pela sua comunicação. Dar aos alunos oportunidades de aprenderem matemática significativa contribui para que desenvolvam atitudes positivas em relação à disciplina. Estimular a curiosidade, o interesse, a motivação e a criatividade é essencial para que reconheçam a importância da Matemática na sua formação pessoal e académica e adquiram autoconfiança, sentindo-se capazes de raciocinar e comunicar matematicamente. O contexto socioemocional que permeia a aprendizagem da Matemática tem grande influência sobre a imagem que os jovens constroem da disciplina, sendo determinante na formação de cidadãos críticos, reflexivos, que se sintam capazes de tomar decisões e de formular e resolver problemas de forma criativa e eficiente.

7) Organização do trabalho dos alunos

Valorizar o trabalho colaborativo num ambiente de entreajuda e corresponsabilização, cultivando comunidades de aprendizagem

A valorização do trabalho colaborativo é assumida enquanto estratégia de aprendizagem e enquanto competência a desenvolver nos jovens na sociedade atual. A colaboração é especialmente indicada em tarefas nas quais os alunos possam discutir e definir abordagens e processos de resolução, confrontar ideias e contribuir para um objetivo comum. É também uma forma de trabalho em que os alunos se devem apoiar mutuamente, envolvendo-se em processos matemáticos, argumentação e comunicação, valorizando as competências individuais de cada um. Assim, o trabalho em pares e em pequenos grupos é adequado em múltiplas situações de aprendizagem, desde a realização de tarefas curtas, passando por situações que envolvem pesquisa, recolha de dados, modelação, até ao desenvolvimento de projetos.

8) Comunicação matemática

Comunicar recorrendo a representações múltiplas, com clareza e rigor e um nível de formalização adequado

A comunicação matemática, a par do raciocínio e do pensamento crítico, está presente quando os alunos interpretam gráficos, esquemas, diagramas ou dados, justificam afirmações, utilizam diferentes representações, escrevem e criticam explicações e argumentos matemáticos, com simbologia adequada e produzindo encadeamentos lógicos. Importa pôr em prática diversos tipos de comunicação, dando espaço às discussões coletivas e em pequenos grupos, apresentações orais e/ou escritas, elaboração de relatórios e composições, publicações e exposições, que são essenciais no processo de desenvolvimento de conceitos ou processos matemáticos. A simbologia constitui um sistema de representação matemática robusto que deve ser relacionado com outros modos de representação, tendo em vista a sua utilização oportuna, nomeadamente no âmbito da comunicação matemática. A formalização de conceitos e resultados matemáticos é uma etapa importante da aprendizagem que não se alcança por meio do excesso de manipulação simbólica ou pela prática de artifícios de cálculo demasiadamente técnicos.

9) Avaliação para a aprendizagem

Privilegiar a avaliação formativa na regulação do processo de aprendizagem

A abordagem exploratória que se privilegia implica a integração da avaliação no processo de aprendizagem. É necessário que a avaliação seja um processo, e não um fim, e que esteja ao serviço da aprendizagem dos alunos, de modo a favorecê-la. A diversificação de formas e instrumentos de avaliação é uma das práticas de avaliação recomendadas. Constituem boas tarefas de avaliação formativa as resoluções detalhadas de tarefas, os relatórios e os cartazes. A produção de documentos de natureza audiovisual é igualmente válida e apelativa, designadamente sob a forma de pequenos vídeos, criação de páginas e blogs, tirando partido de ferramentas digitais. As partilhas de ideias e conclusões em sala de aula, bem como as apresentações orais, constituem boas oportunidades para monitorizar e acompanhar o desenvolvimento das aprendizagens e identificar dificuldades e obstáculos.

4. Operacionalização das Aprendizagens Essenciais

A disciplina de Matemática assume um papel estruturante nos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. As Aprendizagens Essenciais do 10.º ano integram uma vertente de formação matemática para a cidadania, em consonância com as restantes disciplinas de Matemática do Ensino Secundário. Esta vertente é concretizada nos temas *Modelos Matemáticos para a Cidadania* e *Estatística*. Para além destes temas, no 10.º ano, os alunos estudam *Geometria* e *Funções* numa lógica de ampliar e aprofundar as abordagens do Ensino Básico.

No 11.º ano as Aprendizagens Essenciais integram *Geometria*, *Matemática Discreta* e *Funções*. No tema Geometria inclui-se geometria analítica e vetorial e trigonometria. Na Matemática Discreta estudam-se técnicas de contagem e sucessões. O estudo das funções considera sempre a abordagem dos diferentes pontos de vista: gráfico, numérico e algébrico.

No 12.º ano é abordado o tema *Números Complexos* e são aprofundados os temas *Probabilidade* e *Funções*. A finalizar as Aprendizagens Essenciais do 12.º ano são propostos três temas em alternativa: *Inferência Estatística*, *Primitivas Imediatas e Integrais Definidos* e *Matrizes*. Deve ser escolhido um destes temas para cada turma da escola, podendo essa escolha variar de turma para turma. Se o tempo o permitir, pode ser trabalhado mais do que um tema opcional.

O trabalho de projeto assume uma dimensão relevante, surgindo explicitamente no 10.º ano e no 11.º ano. No 10.º ano são sugeridas propostas de projetos nos temas Estatística, Modelos Matemáticos para a Cidadania, Geometria sintética e Funções. No 11.º ano são sugeridas propostas de projetos nos temas Matemática Discreta (Sucessões), Geometria e Funções. Em cada um destes anos deverá ser desenvolvido pelo menos um dos projetos, podendo em alternativa ser desenvolvida outra proposta de trabalho, em qualquer tema que o professor considere adequado.

As Aprendizagens Essenciais relativas à Matemática A, dos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas, concretizam-se em três documentos distintos. A organização das Aprendizagens Essenciais, que a seguir se detalha, é apresentada em quatro áreas:

- *Temas, Tópicos e Subtópicos matemáticos*, em que são identificados os conceitos matemáticos a abordar.
- *Objetivos de aprendizagem: conhecimentos, capacidades e atitudes que o aluno deve revelar*, em que são concretizadas, para cada tópico matemático, as aprendizagens visadas com a indicação do foco e da especificação preconizada.
- *Ações estratégicas de ensino do professor*, onde é clarificado o papel do professor e as indicações metodológicas que são consideradas adequadas para atingir os objetivos de aprendizagem definidos, bem como a sugestão de exemplos para a concretização das atividades a propor aos alunos. São também dadas indicações para clarificar os níveis de dificuldade que se consideram parte integrante destas Aprendizagens Essenciais.
- *Áreas de competência do perfil dos alunos*, em que é estabelecida uma ligação entre as aprendizagens matemáticas visadas, as indicações metodológicas e as competências, capacidades e atitudes definidas no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*.

Quando nas Aprendizagens Essenciais se refere recurso a tecnologia gráfica, deve entender-se a utilização de folhas de cálculo ou qualquer versão de calculadora gráfica, física ou sob a forma de emulador, bem como o uso do Geogebra ou outro Ambiente de Geometria Dinâmica, nas suas diversas versões disponíveis em qualquer dispositivo digital. Considera-se também o recurso a aplicativos digitais específicos (apliquetas), disponíveis na internet ou em fóruns temáticos.

Para cada tema são incluídas notas clarificadoras, nomeadamente no que se refere à sugestão de: atividades para o desenvolvimento do Pensamento Computacional, com recurso a exemplos; propostas de possíveis aprofundamentos de alguns temas ou de abordagens alternativas; referências bibliográficas que incluem documentos e recursos para apoio ao trabalho do professor.

A ordem dos temas apresentados nestas Aprendizagens Essenciais constitui um exemplo de uma sequência que se considera adequada no âmbito do processo de gestão e desenvolvimento do currículo.

Na tabela abaixo apresenta-se uma possível distribuição dos tempos letivos pelos tópicos das Aprendizagens Essenciais, tomando como referência vinte e oito semanas letivas, num total de trinta e duas ou trinta e três semanas previstas usualmente no calendário escolar. Considerou-se cada semana com cinco tempos letivos de cinquenta minutos.

Temas	Tópicos	Aulas (50 min)	Semanas
Geometria	Trigonometria	35	12
	Produto escalar	25	
Matemática discreta	Contagem	15	7
	Sucessões	4	
	Progressões aritméticas e geométricas	11	
	[Trabalho de projeto]	5	
Funções	Funções cúbicas e quárticas	19	9
	Operações com funções	3	
	Funções racionais	6	
	Cálculo diferencial	17	
		Total	28

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO **PERFIL DOS ALUNOS (ACPA)**

- **A** Linguagens e textos
- **B** Informação e comunicação
- **C** Raciocínio e resolução de problemas
- **D** Pensamento crítico e pensamento criativo
- **E** Relacionamento interpessoal
- **F** Desenvolvimento pessoal e autonomia
- **G** Bem-estar, saúde e ambiente
- **H** Sensibilidade estética e artística
- **I** Saber científico, técnico e tecnológico
- **J** Consciência e domínio do corpo

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
GEOMETRIA Trigonometria Resolução de problemas que envolvam triângulos Ângulo e arco generalizados Círculo trigonométrico Expressão geral das amplitudes dos ângulos com os mesmos lados Radiano Redução ao primeiro quadrante	Resolver problemas variados, ligados a situações concretas, que permitam recordar e aplicar métodos trigonométricos estudados no 3.º ciclo do EB, na resolução de triângulos retângulos e não retângulos. Relacionar e aplicar, na resolução de problemas, as noções de ângulo e arco orientados e de ângulo e arco generalizados e a respetiva amplitude. Identificar e interpretar o círculo trigonométrico. Reconhecer, analisar e aplicar, na resolução de problemas, razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) de ângulos generalizados no círculo trigonométrico. Conhecer a unidade de medida radiano. Utilizar o círculo trigonométrico, na redução ao primeiro quadrante, na dedução da fórmula fundamental da Trigonometria e na resolução de problemas.	Recorrer a exemplos históricos de trigonometria para motivar os alunos para o tema, podendo ser usados exemplos de livros antigos em que se recorre ao grafómetro. Propor problemas variados, ligados a situações concretas, que permitam recordar e aplicar métodos trigonométricos (problemas ligados a sólidos, a moldes, à navegação, à topografia, históricos e outros) bem como sensibilizar para a importância da Trigonometria nas várias ciências. Introduzir o conceito de radiano, relacionando-o com o grau, tendo em vista a sua futura utilização na representação gráfica de funções trigonométricas. Estimular o recurso sistemático ao círculo trigonométrico, em casos simples. Propor a aplicação da equação reduzida da circunferência no círculo trigonométrico para deduzir a fórmula fundamental da Trigonometria. Levar os alunos a compreender a diferença na representação gráfica de uma função trigonométrica quando se utilizam unidades diferentes (graus e	Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C)

Funções trigonométricas seno, cosseno e tangente Fenómenos periódicos	Reconhecer, analisar e aplicar as funções trigonométricas $sen(x)$, $cos(x)$ e $tg(x)$ na modelação de fenómenos periódicos. Identificar fenómenos periódicos e usar os conceitos de período, máximo, mínimo, amplitude e frequência, no estudo dos fenómenos periódicos. Determinar valores aproximados de zeros, extremos e outros pontos relevantes, num contexto de resolução de problemas, com recurso à tecnologia gráfica.	radianos) e a perceber as vantagens da sua representação em radianos. Incentivar o uso do círculo trigonométrico e da tecnologia gráfica para explorar as funções trigonométricas $sen(x)$, $cos(x)$ e $tg(x)$. Promover o estudo da variação do período em funções do tipo $f(x) = sen(cx)$ e $g(x) = cos(cx)$, com c não nulo. Promover, com o auxílio da tecnologia, o estudo de famílias de funções do tipo $f(x) = a + b\, sen(c(x-d))$ e $g(x) = a + b\cos(c(x-d))$, com a, b, c e d números reais, b e c não nulos, propondo a exploração de situações como, por exemplo, a variação das marés, a roda gigante ou as ondas sonoras. Propor o estudo de situações problemáticas, utilizando tecnologia, recorrendo a modelos com funções trigonométricas.	Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D) Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão (I)
Produto escalar Declive e inclinação de uma reta Produto escalar de dois vetores no plano e no espaço: - definição e propriedades; - expressão do produto escalar nas coordenadas dos vetores em referencial ortonormado	Reconhecer e aplicar na resolução de problemas a relação entre a inclinação e o declive de uma reta no plano. Conhecer o conceito de produto escalar de dois vetores, no plano e no espaço, definido com base nas coordenadas dos vetores num referencial ortonormado. Conhecer que o produto escalar de dois vetores é igual ao produto das suas normas pelo cosseno do ângulo formado por eles (sem demonstração).	Introduzir o conceito de produto escalar a partir da expressão do produto escalar nas coordenadas dos vetores em referencial ortonormado, no plano e no espaço. Estimular os alunos a utilizar o Geogebra para visualizar, explorar e estabelecer conjeturas, envolvendo por exemplo:	Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

Perpendicularidade de vetores e de retas Equações cartesianas de planos no espaço	Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas a noção de produto escalar, nomeadamente: relacionando o ângulo de dois vetores não nulos com o sinal do respetivo produto escalar; estabelecendo uma relação entre os declives de duas retas perpendiculares no plano; determinando o ângulo entre dois vetores; e determinando o ângulo formado por duas retas. Resolver problemas envolvendo retas no plano, utilizando equações vetoriais e reduzidas de retas e posição relativa de retas. Determinar a equação cartesiana de um plano dados um ponto e um vetor normal. Resolver problemas envolvendo: equações vetoriais de retas; equações cartesianas de planos; distância de um ponto a um plano; e posição relativa de retas e planos.	- a relação entre a inclinação e o declive de uma reta; - a relação do ângulo de dois vetores e o sinal do produto escalar; - o ângulo de duas retas; - a posição relativa de retas. Explorar a ligação do cálculo vetorial com a Física (caso os alunos tenham frequentado a disciplina de Física e Química A). Estimular os alunos a utilizar o Geogebra 3D para visualizar, explorar e estabelecer conjeturas, envolvendo planos e retas no espaço, por exemplo explorar secções determinadas por cortes de planos num cubo ou numa pirâmide. Nestas Aprendizagens Essenciais não são considerados lugares geométricos definidos a partir do produto escalar.	

Possíveis aprofundamentos

Estudar e eventualmente demonstrar a lei dos senos e a lei dos cossenos, na resolução de triângulos não retângulos.
Aplicar a lei dos cossenos para demonstrar que o produto escalar de dois vetores é igual ao produto das suas normas pelo cosseno do ângulo formado por eles, verificando-se assim que o produto escalar não depende do referencial escolhido.
Relacionar a música com a trigonometria, como por exemplo o estudo dos batimentos para afinar instrumentos ou o estudo das notas musicais através de funções trigonométricas e da sua representação gráfica.
Usar dados recolhidos com sensores ou consultados na Internet utilizando funções trigonométricas para modelar situações, como por exemplo: altura das marés, percurso dos pistões no motor a combustão, movimento de um pêndulo, frequência cardíaca e pressão sanguínea e construção de pontes suspensas.
Estudar alguns exemplos históricos relacionados com a trigonometria, por exemplo: Tabela de cordas de Ptolomeu, Bhaskara e o cálculo dos senos, Al-Kashi e o cálculo das funções trigonométricas e Trigonometria em Pedro Nunes.
Ampliar o estudo do produto escalar de vetores para definir lugares geométricos no plano e no espaço.
Resolver problemas beneficiando de visualizações interativas em 3 dimensões que se podem efetuar usando o software Geogebra na sua versão 3D. Eis alguns exemplos possíveis:

- Paralelismo: https://www.geogebra.org/m/eFMvcngj
- Interseção de uma esfera: https://www.geogebra.org/m/Mz7eCBFs
- Janela 3D - Esfera seccionada - vista 2D do plano: https://www.geogebra.org/m/acmtajta
- Plano e Equação: https://www.geogebra.org/m/ajzr6gh2
- Planos no espaço: https://www.geogebra.org/m/PfhVP4U8

Definir o produto vetorial de vetores para ampliar o conceito de produto de dois vetores e explorar a sua utilização na disciplina de Física e na Geometria Analítica (por exemplo, definir um plano por uma equação cartesiana dados um ponto e dois vetores do plano não colineares).

Bibliografia de referência

Ávila, G. (1988). Geometria e Astronomia. *Revista do Professor de Matemática*, nº 13. Obtido de https://www.rpm.org.br/cdrpm/13/2.htm
Baltazar, A., Delgado, F. (1989). Trigonometria ... com um pouco de sorte! *Educação & Matemática*, nº 11, p. 31.
Coelho, A. (1980). Uso das calculadoras em trigonometria. *Educação & Matemática*, nº 15, p. 29-30.
Devlin, K. (2002). *Matemática - A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.
Carreira, S., e Amado, N. (2018). A tecnologia entre uma tarefa de geometria analítica e a Vesica Piscis. *Educação & Matemática*, nº 148, p. 39-43.
Estrada, M. F. et al. (2000). *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
Haese, M. et al (2019). *Mathematics - Applications and Interpretation HL 2* (for use with IB Diploma Programme). Marleston: Haese Mathematics.
Linck, F. (2010). *Música E Matemática: Experiências Didáticas em dois diferentes contextos*. Universidade Federal Do Rio Grande Do Sul. Obtido de https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/31592/000782668.pdf
Loureiro, C. et al. (1997). *Geometria 10º ano de escolaridade*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
Loureiro, C. et al. (1998). *Geometria 11º ano de escolaridade*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
Loureiro, C. et al. (1999). *Trigonometria e Números Complexos*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
Mesquita, C., Marques, F., Carreira, S. (1992). A folha de cálculo e a trigonometria em actividades de aplicações e modelação. *Educação & Matemática*, nº 24, p. 7-12.
Morais, C. (2003). *A Astronomia no ensino da Matemática: Uma Proposta para o Ensino Secundário*. Obtido de https://repositorio-aberto.up.pt/handle/10216/9666
Nogueira, D. (2013). *Tópicos da História da Trigonometria*. Universidade de Aveiro. Disponível em https://ria.ua.pt/handle/10773/13298
Pereira, C., Cegonho, J., e Rocha, M.I. (1992). A trigonometria à volta de uma caneca de cerveja. *Educação & Matemática*, nº 23, p. 20-22.
Precatado, A., e Guimarães, H. (2001). *Materiais para a aula de Matemática*. Lisboa: APM.
Sebastião e Silva, J. (1975-1978). *Compêndio de Matemática* (3 volumes). Lisboa: GEP.
SESAMATH - *Manuel Maths 1re - Programme 2019*. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms1spe_2019
Veloso, E. (1998). *Geometria - Temas atuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
Wikipedia (2022). *Batimentos*. Obtido de https://pt.wikipedia.org/wiki/Batimentos

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
MATEMÁTICA DISCRETA Contagem Princípios gerais da contagem	Conhecer e aplicar os princípios da adição e da multiplicação em problemas de contagem. Usar diferentes formas de representação, nomeadamente diagramas em árvore e tabelas, em problemas de contagem.	Propor a resolução de problemas de contagem com base em situações reais que ilustrem os princípios gerais de contagem (por exemplo, caminhos entre cidades, número de ementas possíveis escolhidas a partir de um menu, etc.). Propor a discussão de situações em que o princípio do pombal seja útil na contagem, por exemplo: - quantas pessoas são necessárias para que se possa garantir que há pelo menos duas delas cujo aniversário ocorre no mesmo mês? - quantas luvas será preciso tirar, sem olhar, de uma gaveta com luvas, todas do mesmo padrão, para garantir que tiramos um par (mão esquerda e mão direita)?	Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) Gere projetos e toma decisões na resolução de problemas e analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C)
Arranjos completos, permutações e arranjos simples	Identificar arranjos completos, permutações e arranjos simples como casos particulares da aplicação do princípio da multiplicação.	Introduzir o conceito de fatorial com o objetivo de simplificar a escrita de produtos sucessivos. Promover a análise de situações de contagem em que o princípio da multiplicação não seja suficiente, mas onde se torne necessário adicionar contagens de diferentes alternativas, isto é, se o problema contém diferentes casos (por exemplo, escolher dois livros de diferentes disciplinas retirados de 3 estantes, uma com *5* livros de Matemática, outra com *4* livros de Física e outra com *7* livros de Biologia). Promover a identificação de vantagens e limitações de cada tipo de representação em problemas de contagem. Propor a exploração de exemplos ilustrativos que permitam transitar do princípio da multiplicação para: - a definição de arranjos completos (por exemplo, código do cartão multibanco, pin do telemóvel);	

Combinações	Identificar combinações como forma de saber o número de subconjuntos com p elementos de um dado conjunto com n elementos $(p \leq n)$.	- a definição de permutações (por exemplo, número de partidas num torneio em que todos os participantes se defrontam entre si, número de vetores obtidos por dois pontos dados 8 pontos não colineares entre si); - a definição de arranjos simples (preenchimento dos três lugares de um podium). Propor a resolução de problemas que envolvam combinações como por exemplo o número de possibilidades de formar uma comissão de cinco alunos de uma turma.	Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido, no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D)
Sucessões Termo geral Definição por recorrência	Identificar e analisar: - regularidades em exemplos numéricos e pictóricos; - formas de gerar sucessões através de termos gerais e por recorrência.	Considerar que as sucessões são definidas no conjunto dos números naturais à exceção de zero. Incentivar o recurso à tecnologia para gerar sequências que representam sucessões, distinguindo ordem e termo, interpretando graficamente o comportamento de sucessões. Conduzir à definição de sucessão por recorrência e através do termo geral. Solicitar a construção ou a adaptação de um programa em *Python* para obter um número previamente fixado de termos de uma sucessão definida por recorrência (por exemplo, um programa em *Python* que permita analisar conjeturas relacionadas com sucessões definidas por recorrência, como por exemplo a conjetura de Collatz).	Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
Progressões aritméticas e geométricas	Reconhecer progressões aritméticas e geométricas. Saber definir progressões aritméticas e geométricas através do 1.º termo e da razão (r).	Promover a identificação e caracterização de progressões aritméticas e geométricas através de contextos da vida real (por exemplo, número de cadeiras numa fila de um anfiteatro, capital resultante da aplicação de juros simples e de juros compostos).	

Soma de n termos consecutivos de uma progressão	Determinar a soma de n termos consecutivos de uma progressão aritmética e de uma progressão geométrica.	Recorrer à história de Gauss com o objetivo de evidenciar uma forma expedita para o cálculo da soma de n termos consecutivos de uma progressão aritmética. Recorrer à lenda de Sissa e do tabuleiro de xadrez com o objetivo de evidenciar uma forma expedita para o cálculo da soma de n termos consecutivos de uma progressão geométrica.	
	Conhecer o comportamento da sucessão do tipo a^n, com $a > 1$ e para $0 < a < 1$, para valores de n suficientemente grandes.	Promover o estudo das sucessões do tipo a^n. Com $a > 1$, os termos de a^n excedem qualquer valor finito, desde que n seja suficientemente grande. Para o caso $0 < a < 1$ pode observar-se que os termos de a^n são tão próximos de zero quanto se queira, desde que n seja suficientemente grande.	
Soma infinita de uma progressão geométrica com $\|r\| < 1$	Conhecer que a soma de todos os termos de uma progressão geométrica (série geométrica), com $\|r\| < 1$ é um valor finito.	Utilizar exemplos geométricos, em casos simples, para exemplificar que a soma de todos os termos de uma progressão geométrica com $\|r\| < 1$ é um valor finito, por exemplo: sucessão de áreas de quadrados em que a área de cada termo é metade da área do anterior (área em progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ logo a soma das áreas é finita). Utilizar exemplos geométricos, em casos simples, para exemplificar que a soma de todos os termos de uma progressão geométrica com $r > 1$ é infinito, por exemplo: o comprimento da curva de Koch, que é constituída por segmentos de reta em progressão geométrica de razão $\frac{4}{3}$. Recorrer a uma folha de cálculo para explorar aproximações da soma de todos os termos de progressões aritméticas e geométricas, em casos simples, evidenciando os exemplos em que a soma é um valor finito.	
Aprofundamento do estudo de Sucessões com trabalho de projeto (*)	Aplicar e aprofundar conceitos e processos associados às sucessões num problema contextualizado, desenvolvendo competências de generalização, representação e comunicação matemática. Desenvolver hábitos de pesquisa.	Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões). Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório.	

	Interpretar de forma crítica, informação, modelos e processos. Conhecer, aplicar e criar modelos presentes nas sucessões, tirando partido da tecnologia. Desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.	Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia. Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta. Estimular a discussão do tema de cada investigação que pode ser escolhido de entre uma lista de opções, como, por exemplo: - Sucessão de Fibonacci e o número de ouro; - Sucessão de Neper cujo limite é o número e; - Paradoxos de Zenão; - Números poliédricos; - Números primos de Mersenne (da forma $2^n - 1$); - Sucessão de termo geral $2^n - 1$ associada às Torres de Hanói. Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática, ou o recurso à programação, sempre que for considerado relevante.	
(*) Este tópico pode ser substituído por tópico idêntico noutros temas do 11.º ano tal como é exemplificado nas propostas apresentadas abaixo.			

Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer ordem entre eles. O reconhecimento de padrões na tarefa (ou situação) apresentada ou em problemas semelhantes, anteriormente resolvidos, poderá contribuir para facilitar a estruturação do algoritmo a desenvolver. Antes de redigir o programa na linguagem *Python*, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Exemplo de programa em *Python* para simular a sequência de Collatz obtida a partir de um número dado (previamente fixado).

```
x=int(input("Indica o 1.º termo da sucessão: "))
seq=[]
def collatz_sequencia(x):
    seq = [x]
    if x < 1:
       return []
    while x > 1:
       if x % 2 == 0:
         x = x / 2
       else:
         x = 3 * x + 1
       seq.append(int(x))
    return seq
print(collatz_sequencia(x))
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Poder-se-á igualmente:
- recorrer à folha de cálculo para gerar sequências que representam sucessões, distinguindo ordem e termo;
- gerar a representação gráfica e interpretar graficamente o comportamento de sucessões.

Possíveis aprofundamentos

Estudar a série harmónica, sobretudo analisando o facto de que, embora a sucessão $\frac{1}{n}$ seja convergente para zero, a série não é convergente.

Estudar algumas aplicações do Princípio do Pombal (Se n pombos voam para $k < n$ pombais, num dos k pombais coabitam pelo menos dois pombos) e mostrar que não se verifica em conjuntos infinitos (exemplo: Hotel de Hilbert).

Bibliografia de referência

Aparício, R. (2017). Materiais para a Aula de Matemática - Como que por magia, *Educação & Matemática*, nº 143, p. 17.
Caraça, Bento de Jesus (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Ciência Aberta. Lisboa: Gradiva.
Conway, J., e Guy, R. (1999). *O livro dos números*. Lisboa: Gradiva.
Devlin, K. (2002). *Matemática - A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.
Estrada, M. F. et al. (2000). *História da Matemática,* Universidade Aberta.
Haese, M. et al. (2019). *Mathematics - Analysis and approaches HL 2* (for use with IB Diploma Programme). Marleston: Haese Mathematics.

Haese, M. et al. (2019). *Mathematics - Core topics HL 1* (for use with IB Diploma Programme). Marleston: Haese Mathematics.
Lima, V.S. et al. (2004). Progressões Aritméticas e Geométricas: História, Conceitos e Aplicações. *Intellectus Revista Acadêmica Digital*. vol. 2, p. 34-68. Obtido de http://www.revistaintellectus.com.br/artigos/2.12.pdf
Mello, H. (2017). *Desmistificando o ensino de Análise Combinatória*. Rio de Janeiro: IMPA. Obtido de https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/TCC_2017_harley_paulino.pdf
Oliveira, R. (1995). As progressões geométricas no cálculo financeiro. *Educação & Matemática*, nº 36, p. 10-12.
Paradinha, H., e Leuca, T. (2010). Um olhar sobre a construção de conexões matemáticas no estudo das sucessões, *Educação & Matemática*, nº 110, p. 27-32.
Pasian, M.E. (2012). *História da Matemática e as Progressões Aritméticas e Geométricas*. Universidade Estadual de Maringá. Obtido de http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2012/2012_uem_mat_pdp_maria_elizabete_pasian.pdf
Peça, C., e Santos, A., (1988). A travessia do deserto e as sucessões!, *Educação & Matemática*, nº 7, p. 13-14.
Precatado, A. (2001). Materiais para a Aula de Matemática - Algas no laboratório de Matemática, *Educação & Matemática*, nº 63, p. 9.
Sebastião e Silva, J. (1975-1978). *Compêndio de Matemática* (3 volumes). Lisboa: GEP.
SESAMATH - *Manuel Maths 1re - Programme 2019*. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms1spe_2019
SESAMATH - *Manuel Maths 2de - Programme 2019*. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms2_2019
Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., e Nápoles, S. (1997). *Funções - 10º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., e Nápoles, S. (1998). *Funções - 11º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., e Nápoles, S. (1999). *Funções - 12º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
Torres, D. (2004). Números felizes e sucessões associadas. *Educação & Matemática*, nº 77, p. 35-38.
Yu, B.,Inácio, C.,Coelho, S.,Coelho, N., e Costa, M. (1998). Jogo síntese da unidade Sucessões. *Educação & Matemática*, nº 46, p. 21.

Proposta 1

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
Aprofundamento do estudo de Geometria com trabalho de projeto	Aplicar e aprofundar conceitos e processos associados à Geometria num problema contextualizado, desenvolvendo competências de generalização, representação e comunicação matemática. Desenvolver hábitos de pesquisa. Interpretar de forma crítica, informação, modelos e processos. Conhecer, aplicar e criar modelos presentes na Geometria, tirando partido da tecnologia. Desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.	Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões). Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório. Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia. Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta. Estimular a discussão do tema de cada investigação que pode ser escolhido de entre uma lista de opções, como por exemplo: - A Trigonometria e a resolução de triângulos ao longo da história (Túnel de Samos, raio da Terra, distância da Terra à Lua) - Uso da Trigonometria em textos clássicos chineses ("Manual Matemático da Ilha do Mar"); - História da Geometria Analítica com Descartes e Fermat; - O cálculo vetorial aplicado às Ciências da Computação e à Economia; - Estudo do produto vetorial e suas aplicações à Física. Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática, ou o recurso à programação, sempre que for considerado relevante.	Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido, no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D) Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

Proposta 2

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
Aprofundamento do estudo de Funções com trabalho de projeto	Aplicar e aprofundar conceitos e processos associados às Funções num problema contextualizado, desenvolvendo competências de generalização, representação e comunicação matemática. Desenvolver hábitos de pesquisa. Interpretar de forma crítica, informação, modelos e processos. Conhecer, aplicar e criar modelos presentes nas Funções, tirando partido da tecnologia. Desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.	Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões). Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório. Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia. Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta. Estimular a discussão do tema de cada investigação que pode ser escolhido de entre uma lista de opções, como por exemplo: - Conceito de infinitésimo ao longo da História; - Episódios da História do Cálculo Diferencial (Teorema de Rolle para polinómios, o método dos máximos e mínimos de Fermat, a definição da derivada de Anastácio da Cunha); - Polinómios interpoladores; - Splines e curvas de Bézier; - Resolução de equações cúbicas e o aparecimento dos números complexos. - Funções polinomiais que surgem no estudo das ciências do espaço (polinómio do 6.º grau na radiação da cintura de Van Allen em SpaceMath@NASA) Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática, ou o recurso à programação, sempre que for considerado relevante.	Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido, no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D) Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

Bibliografia de referência (trabalhos de projeto)

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática: a experiência do projecto mat789*. (Tese de Doutoramento). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
Amado, N., e Carreira, S. (2019). *Trabalho de Projeto*. Obtido de http://hdl.handle.net/10400.1/15482.
George Lucas Educational Foundation (2021). *Project-Based Learning (PBL)*. Obtido de https://www.edutopia.org/project-based-learning.
Mestre, A. P. (2011). *Histórias com matemática: trabalho de projecto no 2º ciclo do ensino básico*. (Dissertação de Mestrado). Obtido de http://hdl.handle.net/10400.1/6872.
Ponte, J. P., Brunheira, L., Abrantes, P., e Bastos, R. (1998). *Projetos Educativos: matemática - ensino secundário*. Ministério da Educação.

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
FUNÇÕES Funções cúbicas e quárticas	Estudar zeros, monotonia, extremos e comportamento no infinito, tendo como base o gráfico de famílias de funções cúbicas e quárticas, recorrendo à tecnologia gráfica. Reconhecer que para funções polinomiais de grau ímpar existe sempre pelo menos um zero real.	Promover a exploração gráfica de funções polinomiais dos 3.º e 4.º, visando identificar intuitivamente o número máximo de zeros e o comportamento no infinito, bem como conjeturar possíveis expressões analíticas de funções representadas graficamente. Propor a investigação gráfica do comportamento no infinito de funções polinomiais de grau ímpar e de grau par, justificando o observado por comparação com o comportamento do termo de maior grau, evidenciando o seu papel dominante.	Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avalia, valida e organiza a informação recolhida (B)
Divisão euclidiana de polinómios e regra de Ruffini/algoritmo de Horner	Efetuar a divisão inteira entre polinómios. Utilizar a regra de Ruffini/algoritmo de Horner para determinar o quociente e o resto duma divisão de um polinómio por uma expressão do tipo $x - a$, com a real.	Solicitar a elaboração de programas em *Python* para determinação do valor de um polinómio num ponto e para determinar os coeficientes do polinómio quociente em resultado da divisão de um polinómio por uma expressão do tipo $x - a$, com a real.	
Teorema do resto	Conhecer o teorema do resto.		Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C)
Multiplicidade de uma raiz de um polinómio	Conhecer o conceito de multiplicidade de uma raiz de um polinómio.		
Decomposição de um polinómio em fatores lineares e quadráticos	Decompor polinómios em fatores lineares e quadráticos. Obter a expressão analítica da função polinomial representada graficamente, observando a relevância da multiplicidade dos zeros na sua representação gráfica.	Guiar os alunos na decomposição de polinómios em fatores lineares e quadráticos e na determinação da multiplicidade de uma raiz. Referir a existência de fórmulas resolventes para polinómios de graus 3 e 4, e a sua inexistência para graus superiores.	

Equações e inequações polinomiais de grau superior a 2	Elaborar tabelas de variação de sinal e de monotonia. Resolver gráfica e analiticamente equações e inequações polinomiais de grau superior a 2 no contexto de resolução de problemas de modelação.	Propor a análise do gráfico de funções polinomiais de grau não superior a 4 com recurso à tecnologia gráfica para estudar a monotonia e estudar analiticamente o sinal deste tipo de funções. Promover a resolução gráfica e analítica de equações e inequações polinomiais de grau inferior ou igual a 4. Propor a resolução de problemas em contexto real.	Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)
Operações com funções	Caraterizar funções resultantes de operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) com funções polinomiais de grau não superior a 4. Calcular zeros e estudar o sinal de funções resultantes de operações elementares entre funções, gráfica e analiticamente, em casos simples.	Propor problemas que envolvem operações com funções, incluindo contextos de modelação, recorrendo à tecnologia gráfica, em casos simples. Apresentar expressões analíticas de funções representadas graficamente, que resultam de operações entre funções.	Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)
Funções racionais Funções do tipo: $f(x) = a + \frac{b}{x - c}$, $a, c \in R$, $b \in R\backslash\{0\}$ Assíntotas verticais e horizontais	Reconhecer, interpretar e representar graficamente funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, calculando as coordenadas dos pontos de interseção com os eixos coordenados e estudando o sinal. Conhecer o comportamento das funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ quando x tende para: - mais infinito, - menos infinito, - c por valores inferiores, - c por valores superiores, e identificar as equações das assíntotas horizontais e verticais ao gráfico destas funções e o seu domínio e contradomínio.	Promover o estudo intuitivo de um gráfico de uma situação particular e explorar representações gráficas de funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, com recurso à tecnologia. Propor a resolução de problemas, envolvendo funções racionais em contextos de modelação. Promover a utilização da noção intuitiva e informal de assíntota de uma função (reta da qual se aproxima, tanto quanto se quiser, o gráfico de uma função; mostrar esboços de gráficos de funções intersetados pela assíntota). Propor a identificação das assíntotas verticais e horizontais dos gráficos de funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$.	Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

	Identificar algebricamente as assíntotas verticais e horizontais de funções racionais definidas pelo quociente de funções afins.	Promover o estudo de funções do tipo $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, tendo por base as funções do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$. Resolver gráfica ou analiticamente problemas em contextos de modelação, por exemplo, concentrações em soluções, custo médio, intensidade da luz em função da distância ou problemas geométricos que relacionem áreas de figuras. Fomentar a utilização da tecnologia gráfica para comparar gráficos, explorar, investigar e identificar a existência de assíntotas verticais e horizontais, evidenciando limitações da tecnologia na determinação das suas equações.	
Cálculo diferencial Taxa de variação	Determinar a taxa média de variação de uma função num intervalo $[a, b]$ e fazer a sua interpretação geométrica.	Introduzir a noção de taxa média de variação, incluindo exemplos como a velocidade média do movimento retilíneo de um corpo entre dois instantes. Promover a interpretação geométrica da taxa média de variação de uma função no intervalo $[a, b]$ (declive do segmento de reta entre dois pontos).	
Derivada	Determinar a razão incremental de uma função num dado ponto e chegar à taxa de variação instantânea através da noção intuitiva de limite. Identificar a derivada de uma dada função num ponto com o declive da reta tangente ao gráfico nesse ponto.	Apresentar a noção de taxa de variação instantânea utilizando tabelas construídas com recurso à tecnologia. Promover a utilização da noção intuitiva e informal de limite para obter a taxa de variação instantânea, em casos simples. Guiar os alunos na escrita e interpretação do conceito de derivada enquanto taxa de variação instantânea, aliado à noção de declive da reta tangente ao gráfico num ponto.	

Função derivada	Conhecer a definição de função derivada. Calcular a derivada de monómios, de grau não superior a 3, utilizando o limite da razão incremental de uma função num ponto genérico.	Salientar que a função derivada resulta da determinação da derivada num ponto genérico do domínio. Promover a derivação de monómios de grau não superior a 3, utilizando a definição de derivada num ponto genérico e num ponto específico.	
Regras de derivação	Aplicar regras de derivação (adição, subtração, multiplicação, divisão, potências com expoente natural) para obter a função derivada.	Apresentar as regras de derivação da adição, subtração, multiplicação, divisão e potências com expoente natural.	
Otimização	Reconhecer, numérica e graficamente, a relação entre o sinal da derivada e a monotonia de uma função. Saber que se uma dada função definida num intervalo aberto tem extremo num ponto e tem derivada nesse ponto então essa derivada é nula (teorema de Fermat). Estudar a monotonia e existência de extremos de uma função com derivada finita em todos os pontos do seu domínio, tendo por base o sinal e os zeros da sua derivada. Resolver problemas de otimização de modelação matemática, em casos simples, no contexto da vida real.	Promover a comparação entre o gráfico da função e o gráfico da sua derivada recorrendo quer à tecnologia gráfica, quer a processos analíticos para a construção de quadros de variação de sinal e zeros da derivada. Propor a resolução de problemas de otimização em contexto de modelação.	

Pensamento Computacional

Exemplo de programa em *Python* que permite determinar os coeficientes do polinómio quociente em resultado da divisão de um polinómio de grau 3 por um binómio do tipo x-a, com a real.

```
print('Divisão de um polinómio (P) de grau 3 por x-a')
P=[]
for i in range(4):
    P.append(float(input('Introduza o coeficiente do termo de grau '+str(3-i)+': ')))
a=float(input('a = '))

def f(P,a):
    Q=[P[0]]
    m=P[0]
    for i in range(len(P)-1):
        m=m*a+P[i+1]
        Q.append(m)
    return Q
Q=f(P,a)
R=Q[-1]
print('Coeficientes do polinómio:',P)
print('Coeficientes do quociente:',Q[:-1])
print('Resto: P(',a,')= ',R)
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Possíveis aprofundamentos

Fomentar a visualização gráfica e a interpretação da taxa média de variação recorrendo a ferramentas computacionais, como por exemplo, o Geogebra:

- https://www.geogebra.org/m/RCGp7JjK
- https://www.geogebra.org/m/aC9j8ZrE

Propor a demonstração do Teorema de Fermat.
Propor uma interpretação de Teoremas como o de Weierstrass e o de Rolle (e dos seus corolários).

Bibliografia de referência

Caraça, B. J. (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Ciência Aberta. Lisboa: Gradiva.
Devlin, K. (2002). *Matemática - A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.
Estrada, M. F. Sá, C., Queiró, J. F., Silva, M. C., e Costa, M. J. (2000). *História da Matemática*. Universidade Aberta.
Fernandes, J. A. (1998). Tecnologia gráfica no estudo de classes de funções. *Educação & Matemática*, nº 46, p. 33-36.
Graça, M. (2000). Efeitos colaterais no uso de máquinas de calcular. *Gazeta de Matemática*, nº 139, p. 15-21.
Gracias, T. S., e Borba, M. (2000). Explorando possibilidades e potenciais limitações de calculadoras gráficas. *Educação & Matemática*, nº 56, p. 35-39.
Guichard, J. P. (1986). História da Matemática no ensino da Matemática. Em A. Bouvier (coord), *Didactique des Mathématiques*. Cedic/Nathan,1986 (Adaptação livre de Arsélio Martins). Obtido de https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/mhist.html
Haese, M. et al. (2012) *Mathematics for the international student Mathematics SL* (for use with IB Diploma Programme). Third Edition. Adelaide: Haese Mathematics.
Haese, M. et al. (2019) *Mathematics - Analysis and Approaches SL 2* (for use with IB Diploma Programme). Marleston: Haese Mathematics.
Haese, M. et al. (2019) *Mathematics - Applications and Interpretation SL 2* (for use with IB Diploma Programme). Marleston: Haese Mathematics.
Haese, M. et al. (2019) *Mathematics Core topics SL 1* (for use with IB Diploma Programme). Marleston: Haese Mathematics.
Icart, J. (2021). Fonctions: Une Perspective Historique. *Revue MathémaTICE*, nº 75, maio 2021. Obtido de http://revue.sesamath.net/spip.php?article1414
Pina, H. (2010). *Métodos Numéricos*, Escolar Editora, Lisboa.
Rosa, A. P. (2007). Contrastes entre novos e antigos programas do Ensino Secundário: alguns exemplos. *Gazeta de Matemática*, nº 153, p. 32-41.
Sebastião e Silva, J. (1975-1978) *Compêndio de Matemática* (3 volumes). Lisboa: GEP.
SESAMATH - *Manuel Maths 1re - Programme 2019*. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms1spe_2019
SESAMATH - *Manuel Maths 2de - Programme 2019*. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms2_2019
Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., e Nápoles, S. (1997). *Funções - 10º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., e Nápoles, S.(1998). *Funções - 11º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., e Nápoles, S. (1999). *Funções - 12º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

Cofinanciado por:

PORTUGAL 2020

UNIÃO EUROPEIA
Fundo Social Europeu